الرياضيات

تحقق من فهمك - تدرب وحل المسائل

الثالث الثانوي

الرئيسية

تحقق من فهمك

الفصل (١) تحليل الدوال

الفصل (٢) العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

الفصل (٣) المتطابقات والمعادلات المثلثية

الفصل (٤) القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

الرئيسية

الفصل (١)
تحليل الدوال

١-١

١-٢

١-٣

١-٤

١-٥

١-٦

١-٧

عودة لفهرس تحقق

تحقق من فهمك

اكتب كلًا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة:

1A $\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

1B $x \leq -3$

1C $-1 \leq x \leq 5$

الحل

1A $\{x \mid x \geq 1 , x \in w\}$

1B $\{x \mid x \leq -3 , x \in R\}$

1C $\{x \mid -1 \leq x \leq 5 , x \in z\}$

عودة لفهرس الفصل (١)

تحقق من فهمك

اكتب كلًا من المجموعات الآتية باستعمال رمز الفترة:

2A $-4 \le y < -1$

2B $a \ge -3$

2C $x > 9$ أو $x < -2$

الحل

2A $[-4,-1)$

2B $[-3,\infty)$

2C $(-\infty,-2)\cup(9,\infty)$

تحقق من فهمك

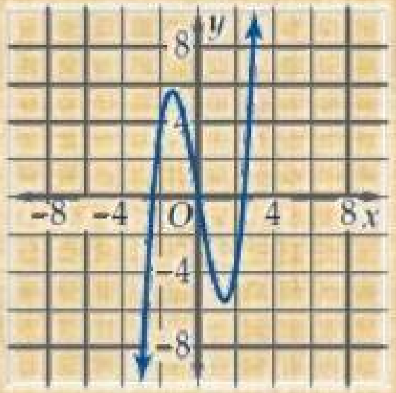
في كل علاقة مما يأتي، حدِّد ما إذا كانت y تمثِّل دالة في x أم لا:

3A تمثِّل قيم x كمية الاستهلاك الشهري لأسرة من الكهرباء، أما قيم y فتمثِّل المبلغ المستحق مقابل الاستهلاك.

3B

x	y
−6	−7
2	3
5	8
5	9
9	22

3C



3D $3y + 6x = 18$

الحل

3A دالة

3B لا تمثل دالة

3C دالة

3D دالة

تحقق من فهمك

إذا كانت $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-2x+1}$، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

4A) $f(12)$ 4B) $f(6x)$ 4C) $f(-3a+8)$

الحل

4A) $\frac{27}{121}$

4B) $\frac{12x+3}{36x^2-12x+1}$

4C) $\frac{-6a+8}{4a^2-42a+49}$

تحقق من فهمك

حدِّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

5A) $f(x) = \frac{5x-2}{x^2+7x+12}$

5B) $h(a) = \sqrt{a^2-4}$

5C) $g(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x+6}}$

الحل

5A) $R-\{-3,-4\}$

$\{x \mid x \neq -3 , x \neq -4 , x \in R\}$

5B) $(-\infty,-2]U[2,\infty)$

5C) $(-3,\infty)$

تحقق من فهمك

سرعة: إذا كانت سرعة مركبة $v(t)$ بالميل لكل ساعة تُعطى بالدالة متعددة التعريف الآتية، حيث الزمن t بالثواني:

$$v(t) = \begin{cases} 4t & , \quad 0 \le t \le 15 \\ 60 & , \quad 15 < t < 240 \\ -6t + 1500 & , \quad 240 \le t \le 250 \end{cases}$$

فأوجد كلًّا مما يأتي:

6A) $v(5)$ 6B) $v(15)$ 6C) $v(245)$

الحل

6A) 20 mi/h

6B) 60 mi/h

6C) 30 mi/h

١-٢ تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

تحقق من فهمك

أسهم: تابع مستثمر قيمة سهم خلال عشرين يومًا، فوجد أنه يمكن تقدير قيمة السهم بالدالة: $v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31, 0 \le d \le 20$ ، حيث $v(d)$ قيمة السهم بالريال في اليوم d.

1A استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة السهم في اليوم العاشر، ثم تحقّق من إجابتك جبريًا.

الحل

32

1B استعمل التمثيل البياني لتحديد الأيام التي بلغت فيها قيمة السهم 30 ريالًا، ثم تحقّق من إجابتك جبريًا.

الحل

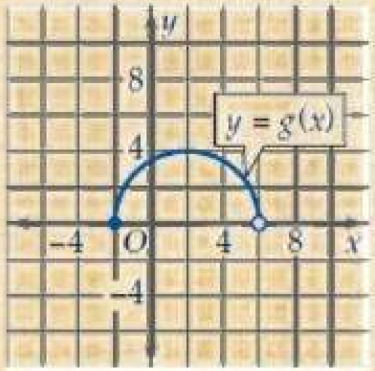
0 , 8.0478 , 16.078

عودة لفهرس الفصل (١)

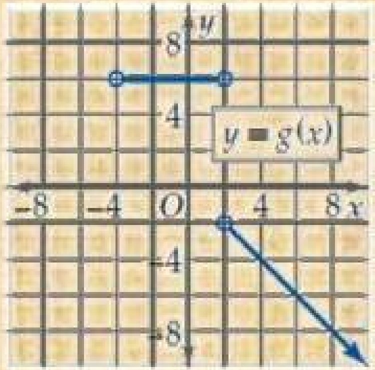
تحقق من فهمك

أوجد مجال الدالة f ومداها باستعمال التمثيل البياني:

2A



2B



الحل

2A المجال $[-2,6)$

المدى $[0,4]$

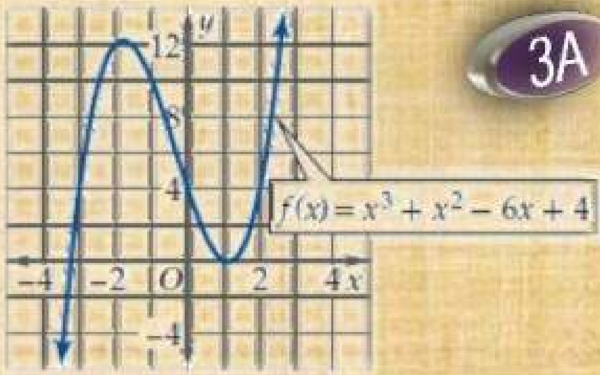
2B المجال $(-4,2)\cup(2,\infty)$

المدى $(-\infty,-2)\cup\{6\}$

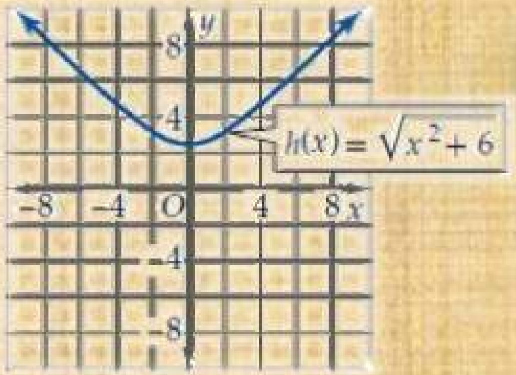
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه، لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y، ثم أوجده جبريًا!

3A



3B



الحل

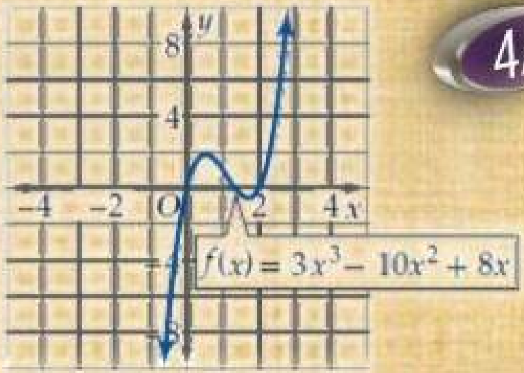
3A $F(0)=4$

3B $F(0)=\sqrt{6}=2.4$

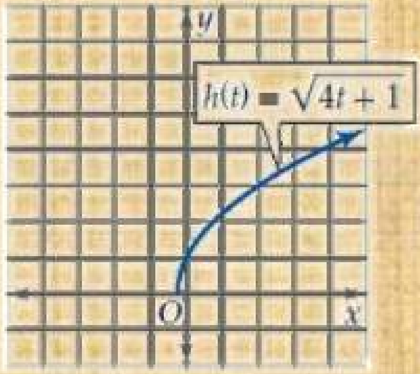
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني للدالة لإيجاد قيم تقريبية لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبريا.

4A



4B



الحل

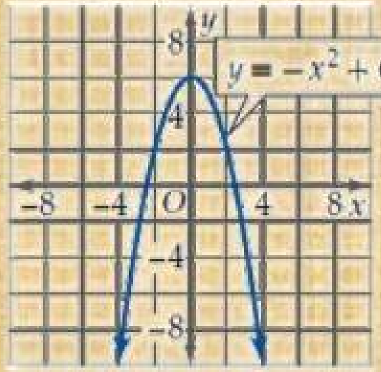
4A $x=0$, $x=\frac{4}{3}$, $x=2$

4B $t = \frac{-1}{4} = -0{,}25$

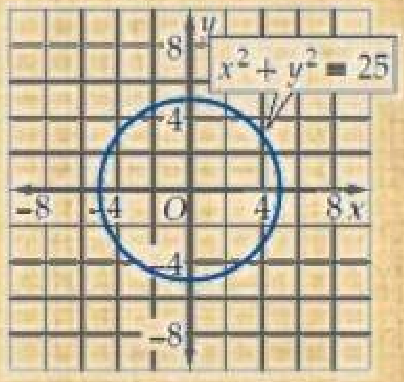
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكلٍ من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل. عزِّز إجابتك عدديًا، ثم تحقق منها جبريًا:

5A



5B



الحل

5A يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور y لأن لكل نقطة (x,y) على المنحنى فإن النقطة $(-x,y)$ تقع أيضاً على المنحنى

5B يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل وحول محوري x، y لأن لكل نقطة (x,y) على المنحنى فإن النقط $(-x,y)$ ، $(x,-y)$ ، $(-x,-y)$ تقع أيضاً على المنحنى

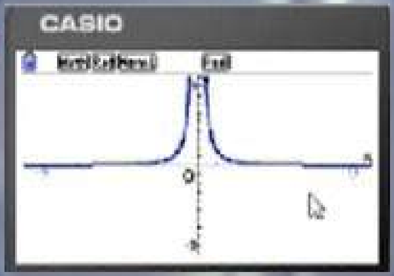
تحقق من فهمك

استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًا، ثمّ حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك، ثم تحقّق من إجابتك جبريًا، وإذا كانت الدالة زوجية أو فردية فصف تماثل منحناها:

6A $f(x) = \frac{2}{x^2}$ **6B** $g(x) = 4\sqrt{x}$ **6C** $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

الحل

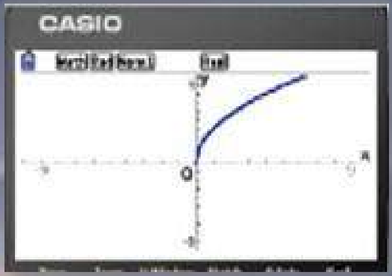
6A



$f(x)=f(-x)=\frac{2}{x^2}$

∴ الدالة زوجية

6B

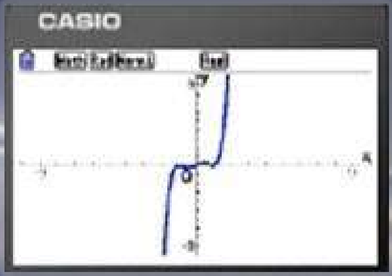


$g(x)\neq g(-x)$

$g(-x)\neq -g(x)$

الدالة ليست زوجية وليست فردية

6C



$h(x)\neq h(-x)$

$h(-x)=-h(x)$

∴ الدالة فردية

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$ ، برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

1A $f(x) = x^3$

1B $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} , & x < 0 \\ x , & x \geq 0 \end{cases}$

الحل

1A

1) $f(0)=0$ ، أي أن الدالة معرفة عند $x=0$

2) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

3) $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

نستنتج أن f(x) متصلة عند x=0.

1B

1) $f(0)=0$ ، أي أن الدالة معرفة عند $x=0$

2) $\lim_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة

نستنتج أن f(x) غير متصلة .

عودة لفهرس الفصل (١)

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. و إذا كانت الدالة غير متصلة فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

2A $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ، عند $x = 0$.

2B $f(x) = \begin{cases} 5x+4 & , \quad x > 2 \\ 2-x & , \quad x \le 2 \end{cases}$ ، عند $x = 2$.

الحل

2A

1) الدالة غير معرفة

2) النهاية غير موجودة

أي أن عدم اتصال لا نهائي

2B

1) الدالة معرفة

2) النهاية غير موجودة

أي أن عدم اتصال قفزي

تحقق من فهمك

3) أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ؛ لتصبح متصلة عند $x = 1$.

3) $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

عودة لفهرس الفصل (١)

تحقق من فهمك

حدِّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة في الفترة المحددة

3A $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3$ ، $[-6, 4]$

3B $f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4}$ ، $[-3, 4]$

الحل

3A

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-43	-32	3	18	19	12	3	-2	3		

بما أن f(-5) سالبة و f(-4) موجبة ، وحسب النتيجة السابقة ، فإنه يوجد صفر للدالة f(x) بين 4- , 5- ، أي يوجد صفر للدالة في الفترة 4- > x > 5- . لاحظ أن قيم الدالة تتغير اشارتها أيضاً في الفترة 1 > x > 0 وفي 2 > x > 1 . وهذا يدل على وجود أصفار حقيقية للدالة في هاتين الفترتين .

3B

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	-1	$-\frac{5}{3}$	-1.5	-1	$-\frac{1}{3}$	0.4	1.25

بما أن f(-3) موجبة و f(-2) سالبة ، وحسب النتيجة السابقة ، فإنه يوجد صفر للدالة f(x) بين 2- , 3- ، أي يوجد صفر للدالة في الفترة 2- > x > 3- . لاحظ أن قيم الدالة تتغير اشارتها أيضاً في الفترة 3 > x > 2 . وهذا يدل على وجود أصفار حقيقية للدالة بهذه الفتره .

تحقق من فهمك

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة في الفترة المحددة

4A $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1$ ، $[-5, 5]$

4B $f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14$ ، $[0, 4]$

الحل

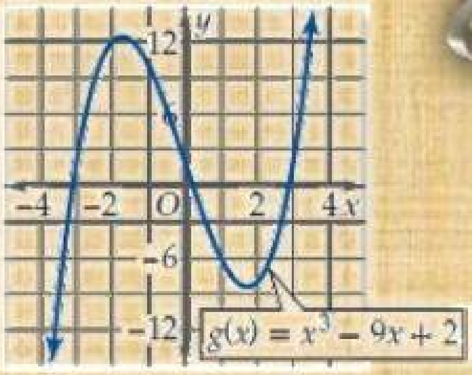
4A $[0,1]$

4B $[1,2]$

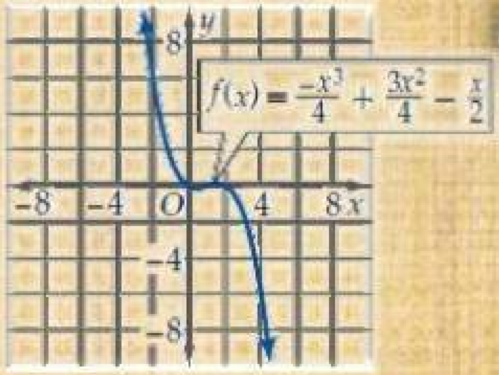
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني للدالة لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا.

5A



5B



الحل

5A

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

5B

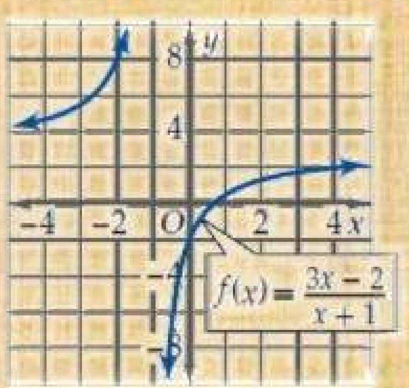
$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

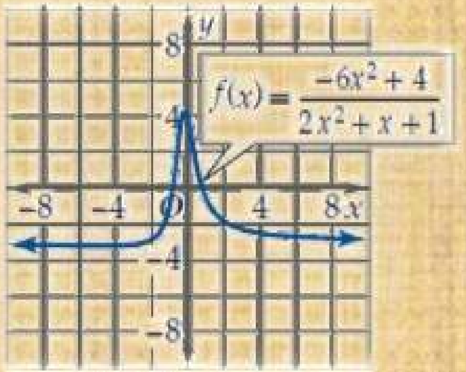
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا.

6A



6B



الحل

6A

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$$

6B

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$$

تحقق من فهمك

7 **فيزياء:** الضغط الديناميكي هو قياس الضغط الناتج عن حركة جزيئات الغاز ويعطى بالقاعدة $q(v) = \frac{\rho v^2}{2}$ ، حيث ρ (ويقرأ روه) كثافة الغاز، و v السرعة التي يتحرك بها الجزيء. ماذا يحدث للضغط الديناميكي لجزيئات الغاز عندما تستمر سرعة الجزيئات في التزايد؟

الحل

7 $\lim_{v \to \infty} q(v) = \infty$

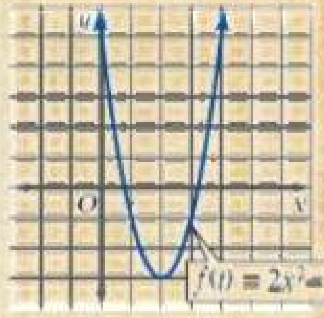
القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

١ ـ ٤

تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزز إجابتك عدديًّا.

1A



1B

الحل

1A يبين التمثيل البياني أن الدالة متناقصة في الفتره $(-\infty,2)$ ، ومتزايدة في الفترة $(2,\infty)$.

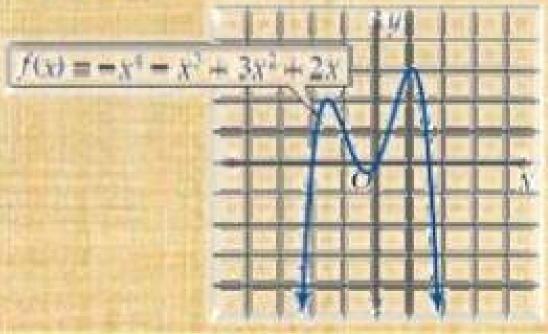
1B يبين التمثيل البياني أن الدالة متزايدة في الفتره $(-\infty,-3)$ ، وثابتة في الفترة $(-3,\infty)$.

عودة لفهرس الفصل (١)

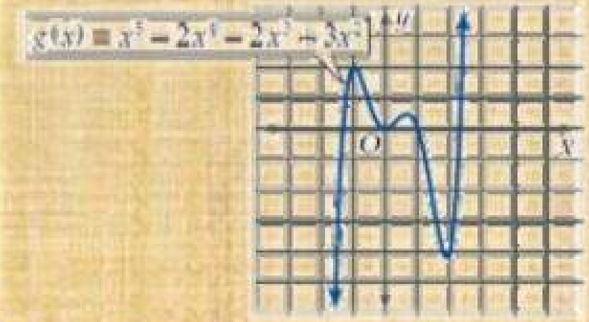
تحقق من فهمك

قدّر قيم x التي يكون للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزز إجابتك عدديًا.

2A



2B



الحل

2A يوضح التمثيل البياني أن للدالة قيمة عظمى محلية عند x=-1.5 ومقدارها 2 تقريباً. كما يوجد للدالة قيمة عظمى مطلقة عند x=1 ومقدارها 3 تقريباً . كما يوجد للدالة قيمة صغرى محلية عند x=-0.3 ومقدارها 0 تقريباً.

2B يوضح التمثيل البياني أن للدالة قيمة عظمى محلية عند x=-1 ومقدارها 2 تقريباً وعند x=0.5 ومقدارها 0.5 تقريباً . كما يوجد للدالة قيمة صغرى محلية عند x=0 ومقدارها 0 تقريباً وعند x=2 ومقدارها 4- تقريباً .لاحظ كذلك أن

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \text{ ، } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

وعليه لا يوجد قيم مطلقة للدالة .

تحقق من فهمك

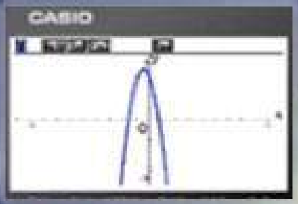
استعمل الحاسبة البيانية لتجد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة مقربة إلى أقرب جزء من مئة، وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

3A $h(x) = 7 - 5x - 6x^2$

3B $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 5$

الحل

3A



باستعمال الحاسبة نجد أن للدالة قيمة عظمى مطلقة عند $x=-0.42$ ومقدارها 8.04 تقريباً .

3B

باستعمال الحاسبة نجد أن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x=-0.12$ ومقدارها 5.06 تقريباً . كما يوجد للدالة قيمة صغرى محلية عند $x=1.45$ ومقدارها 1.24تقريباً . لاحظ كذلك أن

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \text{ ، } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

وعليه لا يوجد قيم مطلقة للدالة .

١-٣ الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات

متوسط معدل التغير: تعلمت في دراستك السابقة أن الميل بين أي نقطتين واقعتين على دالة خطية يمثّل مقدارًا ثابتًا. إلا أنه يتغير عند التعامل مع دوال غير خطية، إذ يختلف الميل باختلاف النقاط؛ لذا فإننا نتحدثُ عن متوسط معدل تغير الدالة بين أي نقطتين.

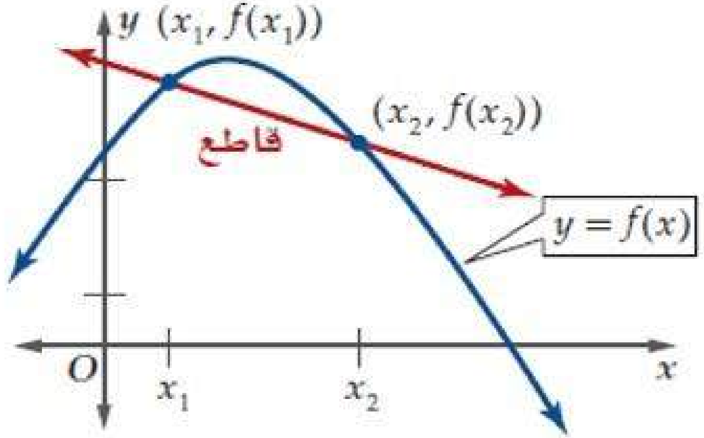
مفهوم أساسي: متوسط معدل التغير

التعبير اللفظي: متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين.

هندسيًا: يُسمّى المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة قاطعًا، و يرمز لميل القاطع بالرمز m_{sec} .

الرموز: متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



عودة لفهرس الفصل (١)

مثال 5 إيجاد متوسط معدل التغير

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = -x^3 + 3x$ الممثلة في الشكل (1.4.1) في كلٍّ من الفترتين الآتيتين:

a) $[-2, -1]$

استعمل قاعدة حساب متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)}$$ عوّض 1− مكان x_2 ، 2− مكان x_1

$$= \frac{[-(-1)^3 + 3(-1)] - [-(-2)^3 + 3(-2)]}{-1 - (-2)}$$ عوّض $f(-1)$ ، $f(-2)$

$$= \frac{-2 - 2}{-1 - (-2)} = -4$$ بسّط

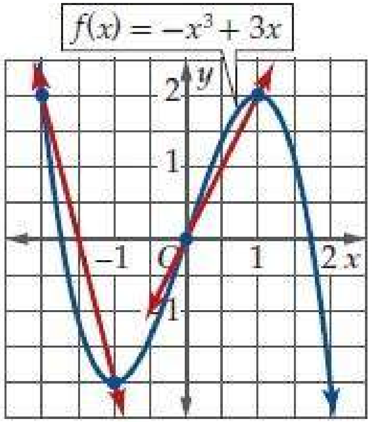
أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$ هو 4− .

b) $[0, 1]$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$ عوّض 1 مكان x_2 ، 0 مكان x_1

$$= \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$ عوّض $f(1)$ ، $f(0)$ وبسّط

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[0, 1]$ هو 2.



الشكل 1.4.1

عودة لفهرس الفصل (١)

تحقق من فهمك

4 **صناعة:** يرغب صاحب مصنع زجاج إنتاج كأس أسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى مساحتها الكلية $10\pi\ in^2$. أوجد طول نصف قطر الكأس وارتفاعه اللذين يجعلان حجمها أكبر ما يمكن.

الحل

4 $r = 1.83$ in
$h = 1.82$ in

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x)$ في كلٍّ من الفترتين الآتيتين:

5A $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2, [2, 3]$

5B $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x, [-5, -3]$

الحل

5A 6

5B -220

مثال 6 من واقع الحياة إيجاد السرعة المتوسطة

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة في كل من الفترتين الآتيتين.

a) من 0 إلى 2 ثانية

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(2) - d(0)}{2 - 0}$$ عوّض 2 مكان t_2 ، 0 مكان t_1

$$= \frac{64 - 0}{2} = 32$$ عوّض $d(2)$ ، $d(0)$ ، وبسّط

متوسط تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 32 ft/s . وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في أول ثانيتين من السقوط هو 32 ft/s .

b) من 2 إلى 4 ثوانٍ

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(4) - d(2)}{4 - 2}$$ عوّض 4 مكان t_2 ، 2 مكان t_1

$$= \frac{256 - 64}{2} = 96 \text{ ft/sec}$$ عوّض $d(4)$ ، $d(2)$ ، وبسّط

متوسط معدل تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 96 ft/s، وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في الثانيتين التاليتين هو 96 ft/s .

الربط مع الحياة

إن الأجسام الساقطة تصل أخيرًا إلى سرعة ثابتة تُسمَى السرعة الحديَّة. ويصل المظلي إلى السرعة الحديَّة (120 - 150 mi/h) عندما تكون مظلته مغلقة.

المصدر: الموسوعة العالمية MSN

تنبيه!

السرعة المتوسطة: يوجد فرق بين مفهومي السرعة المتوسطة والسرعة المتوسطة المتجهة؛ فالسرعة المتوسطة تعني المقدار فقط (كمية قياسية)، بينما السرعة المتوسطة المتجهة تعني المقدار والاتجاه (كمية متجهة).

عودة لفهرس الفصل (١)

تحقق من فهمك

6 **فيزياء:** قُذِفَ جسم إلى أعلى من ارتفاع 4 أقدام عن سطح الأرض، فإذا كان ارتفاع الجسم عن سطح الأرض يُعطى بالدالة $d(t) = -16t^2 + 20t + 4$، حيث t الزمن بالثواني بعد قذف الجسم و $d(t)$ المسافة التي يقطعها الجسم، فأوجد سرعة الجسم المتوسطة في الفترة من 0.5 إلى 1 ثانية على فرض إهمال مقاومة الهواء. وبرر إجابتك.

الحل

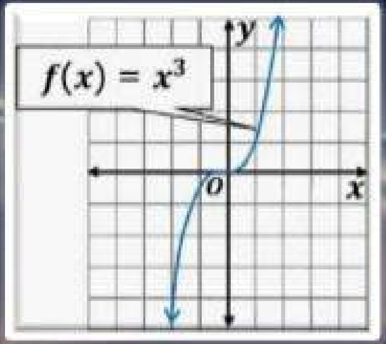
6 -6

1B $f(x) = x^3$

الحل

1B

- مجال الدالة $\{x \mid x \in R\}$، ومداها $\{y \mid y \in R\}$
- يقطع المنحنى المحورين عند النقطة (0,0).
- المنحنى متماثل حول نقطة الأصل ؛ لذا فالدالة فردية.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال .
- يبدأ المنحنى عند $x=0$. وينتهي بـ
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
- المنحنى متزايد على الفترة $(-\infty, \infty)$.



تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًا:

2A $h(x) = x^3 - 5$

2B $h(x) = 8 + x^3$

2C $h(x) = (x + 2)^3 + 4$

الحل

2A

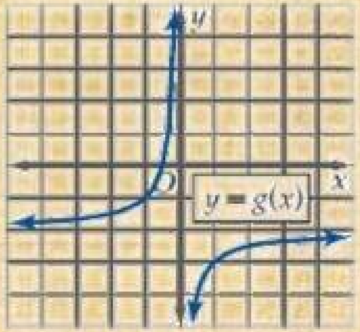
2B

2C

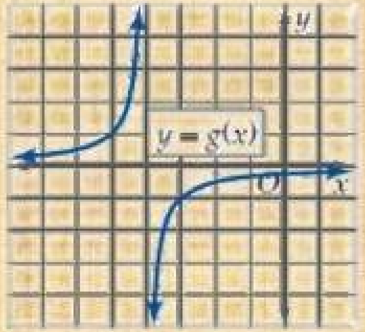
تحقق من فهمك

صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

3A



3B



الحل

3A منحنى الدالة g هو انعكاس لمنحنى $f(x)$ حول المحور y ثم انسحاب وحدتين إلى الأسفل،

أي أن $g(x) = \frac{-1}{x} - 2$

3B منحنى الدالة g هو انعكاس لمنحنى $f(x)$ حول المحور y ثم انسحاب أربع وحدات إلى اليمين،

أي أن $g(x) = \frac{-1}{x+4}$

تحقق من فهمك

عيّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين ومثلهما بيانيًا في المستوى الإحداثي.

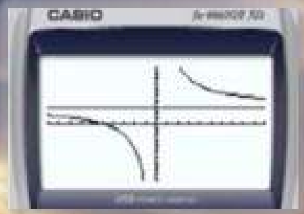
4A $g(x) = [\![x]\!] - 4$

4B $g(x) = \frac{13}{x} + 3$

الحل

4A منحنى الدالة g هو انسحاب لمنحنى $f(x) = |x|$ بمقدار أربع وحدات إلى الأسفل

4B منحنى الدالة g هو توسع رأسي لمنحنى $f(x) = \frac{1}{x}$ ثم انسحاب ثلاث وحدات إلى الأعلى



تحقق من فهمك

مثّل الدالة بيانيًا:

5A

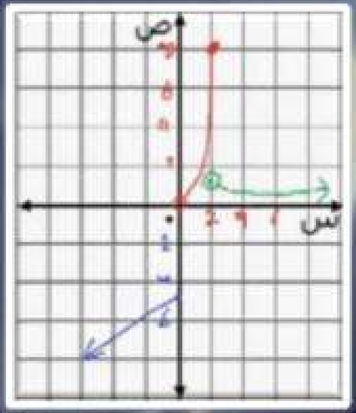
$$g(x) = \begin{cases} x-5 & , \ x \le 0 \\ x^3 & , \ 0 < x \le 2 \\ \frac{2}{x} & , \ x > 2 \end{cases}$$

5B

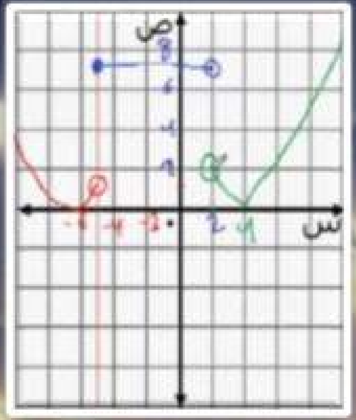
$$h(x) = \begin{cases} (x+6)^2 & , \ x < -5 \\ 7 & , \ -5 \le x \le 2 \\ |4-x| & , \ x > 2 \end{cases}$$

الحل

5A



5B



تحقق من فهمك

كهرباء: إذا كانت شدة التيار $I(x)$ بالأمبير الذي يمر بجهاز DVD تعطى بالدالة $I(x) = \sqrt{\frac{x}{11}}$ ، حيث x القدرة بالواط والعدد 11 هو المعاومة بالأوم.

6A صف التحويلات التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للحصول على الدالة $I(x)$.

6B اكتب دالة تصف مرور تيار في مصباح مقاومته 15 أوم.

الحل

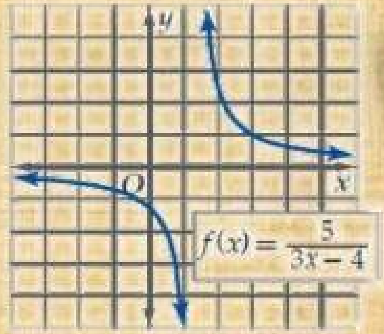
6A منحنى الدالة I هو توسع افقي لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ بمقدار $\frac{1}{11}$

6B $I(x) = \frac{\sqrt{x}}{15}$

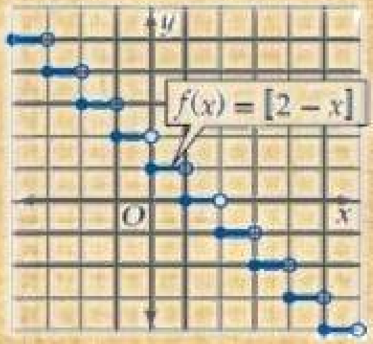
تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كلٍّ من الشكلين أدناه لتمثيل كلٍّ من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًا:

7A



7B



الحل

7A

$h(x)$

$g(x)$

7B

$h(x)$

$g(x)$

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

٦-١

تحقق من فهمك

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ في كل مما يأتي، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة.

1A $f(x) = x - 4, g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

1B $f(x) = x^2 - 6x - 8, g(x) = \sqrt{x}$

الحل

1A

$(f+g)(x) = x-4 + \sqrt{9-x^2}$

مجال الدالة f هو $(-\infty,\infty)$،
ومجال الدالة g هو $[-3,3]$ ؛
لذا فإن مجال الدالة $(f+g)$ هو
تقاطع مجالي f,g وهو $[-3,3]$.

$(f-g)(x) = x-4 - \sqrt{9-x^2}$

مجال الدالة f هو $(-\infty,\infty)$،
ومجال الدالة g هو $[-3,3]$ ؛
لذا فإن مجال الدالة $(f-g)$ هو
تقاطع مجالي f,g وهو $[-3,3]$.

عودة لفهرس الفصل (١)

تابع 1A

1A $(f \circ g)(x) = x\sqrt{9-x} - 4\sqrt{9-x}$

المجال هو [-3,3] .

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{x-4}{\sqrt{9-x^2}}$

المجال هو (-3,3) .

1B $f(x) = x^2 - 6x - 8,\ g(x) = \sqrt{x}$

الحل

1B $(f+g)(x) = x^2-6x-8 + \sqrt{x}$

المجال هو $[0,\infty)$.

$(f-g)(x) = x^2-6x-8 - \sqrt{x}$

المجال هو $[0,\infty)$.

$(f \circ g)(x) = x^2\sqrt{x} - 6x\sqrt{x} - 8\sqrt{x}$

المجال هو $[0,\infty)$.

$(f-g)(x) = \frac{x^2-6x-8}{\sqrt{x}}$

المجال هو $(0,\infty)$.

تحقق من فهمك

أوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](3)$ في كل مما يأتي:

2A $f(x) = 3x + 1,\ g(x) = 5 - x^2$

2B $f(x) = 6x^2 - 4,\ g(x) = x + 2$

الحل

2A

$[f \circ g](x) = 16 - 3x^2$

$[g \circ f](x) = -9x^2 - 6x - 4$

$[f \circ g](3) = -11$

2B

$[f \circ g](x) = 6x^2 + 24x + 20$

$[g \circ f](x) = 6x^2 - 2$

$[f \circ g](3) = 146$

تحقق من فهمك

حدِّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمنًا القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

3A $f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = x^2 - 1$

3B $f(x) = \frac{5}{x}, g(x) = x^2 + x$

الحل

3A $[f \circ g](x) = x$

المجال هو

$\{x \mid x \in R\}$

3B $[f \circ g](x) = \frac{5}{x^2+x}$

المجال هو

$\{x \mid x \neq 0, x \neq -1, x \in R\}$

تحقق من فهمك

أوجد دالتين f و g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، وعلى ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

4A $h(x) = x^2 - 2x + 1$

4B $h(x) = \frac{1}{x+7}$

الحل

4A $g(x) = x - 1 \;,\; f(x) = x^2$

4B $f(x) = \frac{1}{x} \;,\; g(x) = x + 7$

تحقق من فهمك

أعمال: أعلن محل تجاري عن خصم مقداره 15% على ثمن أجهزة الحاسوب لطلاب الجامعات، كما وزّع قسائم يستفيد حاملها بخصم مقداره 100 ريال من ثمن الحاسوب.

5A عبّر عن هذه البيانات بدالتين c و d .

5B أوجد $[c \circ d](x)$ و $[d \circ c](x)$ ، وماذا يعني كلٌّ منهما؟

5C أي التركيبين $c \circ d$ أو $d \circ c$ يعطي سعرًا أقل؟ وضح إجابتك.

الحل

5A $d(x) = 0.85x$, $c(x) = x-100$

5B $|d \circ c|(x) = 0.85x-100$, $|d \circ c|(x) = 0.85x-85$,

(معناها خصم 15% أولاً ثم خصم 100 ريال) (معناها خصم 100 ريال أولاً ثم خصم 15%)

5C $|d \circ c|(x)$ تعطي سعرًا أقل

تحقق من فهمك

مثّل كلًا من الدوال الآتية بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة، أم لا.

1A $h(x) = \frac{4}{x}$

1B $f(x) = x^2 + 5x - 7$

الحل

1A بتطبيق اختبار الخط الافقي نجد أنه يوجد للدالة معكوس

1B بتطبيق اختبار الخط الافقي نجد أنه لا يوجد للدالة معكوس

عودة لفهرس الفصل (١)

تحقق من فهمك

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنا فاكتب غير موجودة.

2A $f(x) = -16 + x^3$

2B $f(x) = \frac{x+7}{x}$

2C $f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$

الحل

2A

$$f^{1}(x) = \sqrt[3]{x+16}$$

المجال والمدى هما جميع الأعداد الحقيقيةى (لا يوجد قيود)

2B

$$f^{-1}(x) = \frac{7}{x-1}$$

المجال $\{x \mid x \neq 0,\ x \in R\}$

المدى $\{x \mid x \neq 1,\ x \in R\}$

2C لا يوجد للدالة معكوس

تحقق من فهمك

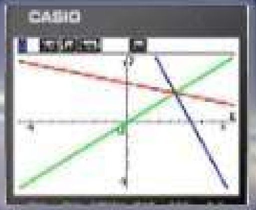
أثبت جبريًا أن كلًا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

3A $f(x) = 18 - 3x,\ g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

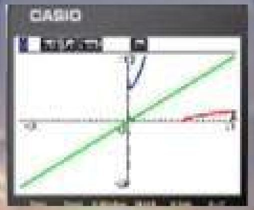
3B $f(x) = x^2 + 10,\ x \geq 0,\ g(x) = \sqrt{x - 10}$

الحل

3A بما أن $f[g(x)]=g[f(x)]= x$ فإن كلاً من الدالتين $f(x),g(x)$ تكون عكسية للأخرى
ويؤكد التمثيل البيانيِ المجاور هذه الإجابة



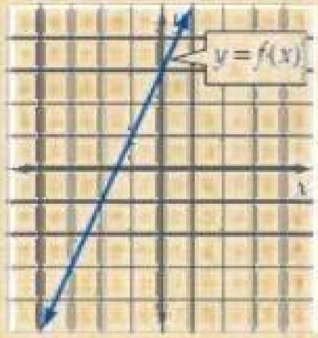
3B بما أن $f[g(x)]=g[f(x)]= x$ فإن كلاً من الدالتين $f(x),g(x)$ تكون عكسية للأخرى
ويؤكد التمثيل البيانيِ المجاور هذه الإجابة



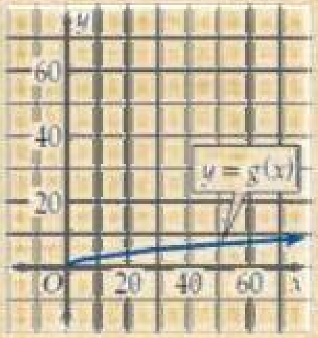
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتمثيل الدالة العكسية لها بيانيًا:

4A

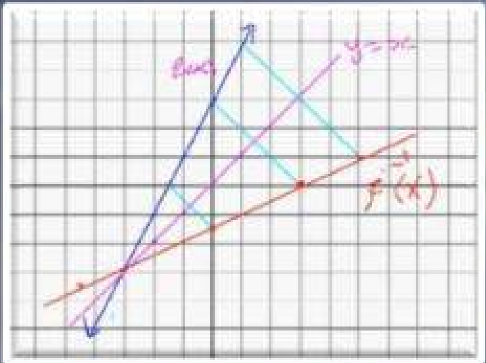


4B

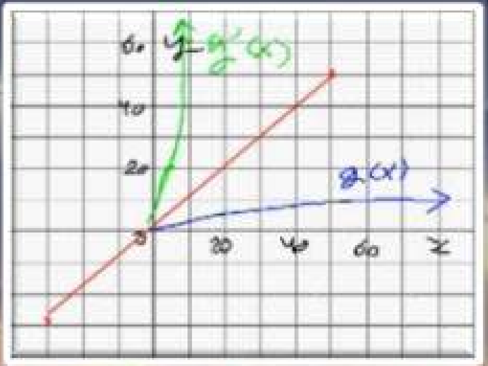


الحل

4A



4B



تحقق من فهمك

توفير: يتبقى لأحمد بعد سداد أقساط منزله وبعض الالتزامات 65% من راتبه الشهري، فإذا خصص منها 1800 ريال لنفقات المعيشة، وقدّر أن بإمكانه توفير 20% من المبلغ المتبقي تقريبًا، فإن مقدار التوفير الشهري يعطى بالدالة: $f(x) = 0.2(0.65x - 1800)$.

5A أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

5B ماذا تمثّل كل من x , $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

5C حدد أية قيود على كل من مجال $f(x)$, $f^{-1}(x)$ إن وجدت. وبرر إجابتك.

5D إذا وفّر أحمد 500 ريالًا في الشهر، فأوجد راتبه الشهري.

الحل

5A يحقق منحنى الدالة $f(x)$ اختبار الخط الأفقي وعليه فإنه يوجد معكوس للدالة

$$f^{-1}(x) = \frac{x+360}{0.13}$$

تابع 5

5B

x تمثل مقدار التوفير في الشهر.

$f^{-1}(x)$ تمثل الراتب في الشهر.

5C

$f(x)$

المجال المناسب $x \geq 2769.23$

5D

6615.38 ريال تقريباً.

الفصل (٢)
العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

٢-١

٢-٢

٢-٣

٢-٤

٢-٥

٢-٦

عودة لفهرس تحقق

تحقق من فهمك

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها، ومداها:

2A $y = 2^{x+3} - 5$

2B $y = 0.1(6)^x - 3$

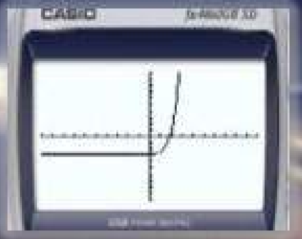
الحل

2A

المجال $(-\infty, \infty)$

المدى $(-5, \infty)$

2B



المجال $(-\infty, \infty)$

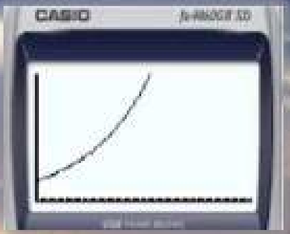
المدى $(-3, \infty)$

تحقق من فهمك

3 **ثقافة مالية:** يتوقع أن يزداد إنفاق عائلة بما نسبته 3.3% سنويًا. إذا كان إنفاق العائلة عام 1425 هـ هو 80000 ريال، فأوجد معادلة أسية تمثل إنفاق العائلة منذ عام 1425 هـ، ثم مثلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.

الحل

3 $f(t)=80000\ (1.035)^{t}$



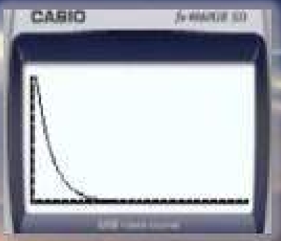
تحقق من فهمك

4 يحتوي كوب الشاي الأسود على 68mg من الكافايين. أوجد معادلة أسية تمثل كمية الكافيين المتبقية في جسم شخص يافع بعد شربه كوبًا من الشاي الأسود، ومثلها بيانيًا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم قدّر كمية الكافيين المتبقية في جسمه بعد ساعتين من شربه الكوب.

الحل

4

$$f(t)=68(0.875)^t$$



بعد ساعتين

$$f(t)=68(0.875)^2 \approx 52.06$$

تحقق من فهمك

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها، ومداها:

5A $y = 2^{x+3} - 5$

5B $y = 0.1(6)^x - 3$

الحل

2A

المجال $(-\infty, \infty)$

المدى $(-5, \infty)$

2B

المجال $(-\infty, \infty)$

المدى $(-3, \infty)$

تحقق من فهمك

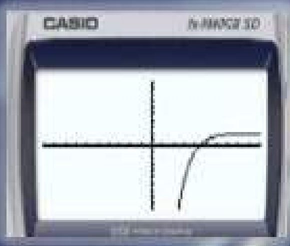
مثّل الدالتين الآتيتين بيانيًا، وحدد مجال، ومدى كل منهما:

إضافي $y = -3\left(\frac{2}{5}\right)^{x-4} + 2$

6 $y = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$

الحل

4A



المجال $(-\infty, \infty)$

المدى $(-\infty, 2)$

6

المجال $(-\infty, \infty)$

المدى $(1, \infty)$

تحقق من فهمك

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

1A $4^{2n-1} = 64$

1B $5^{5x} = 125^{x+2}$

الحل

1A $n=2$

1B $x=3$

عودة لفهرس الفصل (٢)

تحقق من فهمك

إعادة تصنيع: أنتج مصنع 3.2 ملايين عبوة بلاستيكية عام 1426 هـ، وفي عام 1430 هـ أنتج 420000 عبوة بإعادة تصنيع العبوات التي أنتجها عام 1426 هـ.

2A مفترضًا أن إعادة التصنيع استمرت بالمعدل نفسه، اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد العبوات المعادة تصنيعها y بعد x سنة.

2B كم تتوقع أن يكون عدد العبوات مُعادة التصنيع عام 1471 هـ؟

الحل

2A $y=3200000(0.60)^x$

2B لا ينتج المصنع أي شئ في عام 1471هـ

تحقق من فهمك

3 استثمر علي مبلغ 100000 ريال في مشروع تجاري متوقعاً ربحاً سنوياً نسبته 12%، بحيث تضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهرياً. كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين.

الحل

3 181939.67 ريال تقريباً

تحقق من فهمك

حُلّ المتباينة

4A $3^{2x-1} \geq \frac{1}{243}$

4B $2^{x+2} > \frac{1}{32}$

الحل

4A $x \geq -2$

4B $x > -7$

تحقق من فهمك

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

1A $\log_4 16 = 2$

1B $\log_3 729 = 6$

الحل

1A $16=4^2$

1B $729=3^6$

عودة لفهرس الفصل (٢)

تحقق من فهمك

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

2A $4^3 = 64$

2B $125^{\frac{1}{3}} = 5$

الحل

2A $\log_4 64 = 3$

2B $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

أوجد قيمة كل مما يأتي:

3A $\log_3 81$

3B $\log_{\frac{1}{2}} 256$

الحل

3A 4

3B -8

تحقق من فهمك

أوجد قيمة كل مما يأتي:

3A $\log_3 81$

3B $\log_{\frac{1}{2}} 256$

الحل

3A $\text{Log}_3 81 = \log_3 3^4$

$= 4\log_3 3 = 4$

3B $\text{Log}_{0.5} 256 = \log_{0.5} (0.5)^{-8}$

$= -8\log_{0.5} 0.5 = -8$

تحقق من فهمك

أوجد قيمة كل مما يأتي:

4A $\log_9 81$

4B $3^{\log_3 1}$

الحل

4A 2

4B 1

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

5A $f(x) = \log_2 x$

5B $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

الحل

5A

5B

تحقق من فهمك

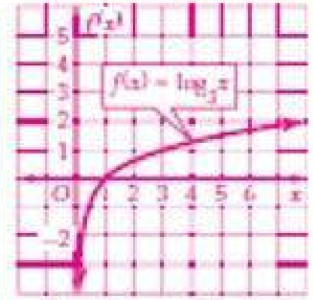
مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

6A $f(x) = \log_2 x$

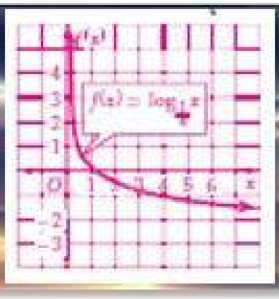
6B $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

الحل

6A



6B



7 أوجد معادلة لمعكوس الدالة $y = 0.5^x$

الحل

7 $y = \log_{0.5} x$

تحقق من فهمك

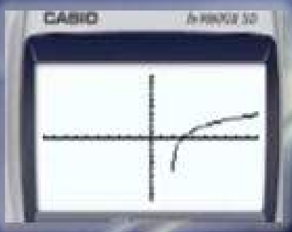
مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

6A $f(x) = 2\log_3(x-2)$

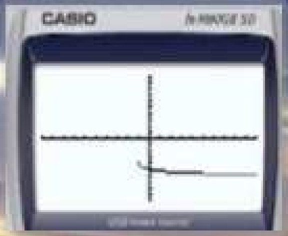
6B $f(x) = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 5$

الحل

6A



6B



7 أوجد معادلة لمعكوس الدالة $y = 0.5^x$

الحل

7 $y = \log_{0.5} x$

تحقق من فهمك

1 استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$.

الحل

1 2.5

عودة لفهرس الفصل (٢)

تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_3 2 \approx 0.63$؛ لتقريب قيمة $\log_3 4.5$.

$\text{Log}_3\ (45\div10) = \log_3\ (9\div2)$

$= \log_3 9 - \log_3 2$

$= 2\log_3 3 - 0.63$

$= 2 - 0.63 = 1.37$

عودة لفهرس الفصل (٢)

خصائص اللوغاريتمات

٢ـ ٤

تحقق من فهمك

3 استعمل الجدول الوارد في فقرة "لماذا؟" وأوجد تركيز أيون الهيدروجين في عصير الليمون .

الحل

3 $10^{-5.5}$ أو 0.0000032 مول من الهيدروجين

عودة لفهرس الفصل (٢)

تحقق من فهمك

إضافي

صوت: يقاس ارتفاع الصوت L بالديسبل (dB)، ويعطى بالصيغة $L = 10 \log_{10} R$، حيث R شدة الصوت النسبية. أوجد الشدة النسبية لصوت ارتفاعه 120 dB .

الحل

2 10^{12}

تحقق من فهمك

4 إذا كان $\log_3 7 \approx 1.7712$ ، فقرّب قيمة $\log_3 49$.

الحل

4 ≈ 3.5424

تحقق من فهمك

احسب قيمة

5A $\log_6 \sqrt[3]{36}$

5B $\log_7 \sqrt[6]{49}$

الحل

4A $\frac{2}{3}$

4B $\frac{1}{3}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

6A $\log_{13} 6a^3bc^4$

6B $\log_6 5x^3y^7z^{0.5}$

الحل

6A $\log_{13} 6 + 3\log_{13} a + \log_{13} b + 4\log_{13} c$

6B $\log_6 5 + 3\log_6 x + 7\log_6 y + \frac{1}{2}\log_6 z$

تحقق من فهمك

احسب قيمة

5A $\log_6 \sqrt[3]{36}$

5B $\log_7 \sqrt[6]{49}$

الحل

4A $\frac{2}{3}$

4B $\frac{1}{3}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

6A $\log_{13} 6a^3bc^4$

6B $\log_6 5x^3y^7z^{0.5}$

الحل

6A $\log_{13} 6 + 3\log_{13} a + \log_{13} b + 4\log_{13} c$

6B $\log_6 5 + 3\log_6 x + 7\log_6 y + \frac{1}{2}\log_6 z$

تحقق من فهمك

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

7A $-5\log_2(x+1)+3\log_2(6x)$

6B $\log_3(2x-1)-\frac{1}{4}\log_3(x+1)$

الحل

7A $\log_{13} 6$

7B $\log_2 \frac{216x^7}{(x+1)^5}$

تحقق من فهمك

حلّ المعادلة

1A $\log_9 x = \frac{3}{2}$

1B $\log_{16} x = \frac{5}{2}$

الحل

1A 27

1B 1024

عودة لفهرس الفصل (٢)

تحقق من فهمك

2 حُلَّ المعادلة $\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$.

F -3 G -1 H 5 J 15

الحل

2 5

حُلَّ المعادلة

3A $2 \log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

3B $\log_6 x + \log_6 (x + 5) = 2$

الحل

3A $x=9$ √
$x=-9$ (حل مرفوض)

3B $x=4$ √
$x=-9$ (حل مرفوض)

تحقق من فهمك

2 حُلَّ المعادلة $\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$.

F -3 G -1 H 5 J 15

الحل

2 5

حُلَّ المعادلة

3A $2 \log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

3B $\log_6 x + \log_6 (x + 5) = 2$

الحل

3A
$x=9$ √
$x=-9$ (حل مرفوض)

3B
$x=4$ √
$x=-9$ (حل مرفوض)

تحقق من فهمك

خلّ المتباينة

4A $\log_4 x \geq 3$

4B $\log_2 x < 4$

الحل

4A $x \geq 64$

4B $x < 16$

5 حل المتباينة $\log_5 (2x + 1) \leq \log_5 (x + 4)$

الحل

5 $x \leq 3$

تحقق من فهمك

حلّ المتباينة

4A $\log_4 x \geq 3$

4B $\log_2 x < 4$

الحل

4A $x \geq 64$

4B $x < 16$

5 حلّ المتباينة $\log_5 (2x + 1) \leq \log_5 (x + 4)$

الحل

5 $x \leq 3$

تحقق من فهمك

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

1A $\log 7$

1B $\log 0.5$

الحل

1A ≈ 0.8451

1B ≈ -0.3010

عودة لفهرس الفصل (٢)

تحقق من فهمك

2 هزات أرضية: ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 9 درجات على مقياس ريختر.

الحل

2 2×10^{25} ايرج تقريباً

حلّ المعادلة

3A $3^x = 15$

3B $6^x = 42$

الحل

3A $x \approx 2.4650$

3B $x \approx 2.0860$

تحقق من فهمك

حل المتباينة

4A $3^{2x} \geq 6^{x+1}$

4B $4y < 5^{2y+1}$

الحل

4A $\{x \mid x \geq 4.4190\}$

4B $\{y \mid y \geq -0.8782\}$

5 اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

الحل

5 ≈ 1.1606

تحقق من فهمك

حل المتباينة

4A $3^{2x} \geq 6^{x+1}$

4B $4y < 5^{2y+1}$

الحل

4A $\{x \mid x \geq 4.4190\}$

4B $\{y \mid y \geq -0.8782\}$

5 اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

الحل

5 ≈ 1.1606

تحقق من فهمك

6 حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 160 خطوة.

الحل

6 ثانية 7.32 ≈

الفصل (٣)
المتطابقات والمعادلات المثلثية

٣-١

٣-٢

٣-٣

٣-٤

٣-٥

عودة لفهرس تحقق

تحقق من فهمك

1A أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$, $270° < \theta < 360°$.

1B أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sec\theta$ إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{7}$, $180° < \theta < 270°$.

الحل

1A $= -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

1B $= -\frac{7\sqrt{5}}{15}$

عودة لفهرس الفصل (٣)

تحقق من فهمك

بسّط العبارة :

2A $\dfrac{\tan^2\theta\csc^2\theta - 1}{\sec^2\theta}$

2B $\dfrac{\sec\theta}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$

الحل

2A $\sin^2\theta$

2B $\tan\theta$

3 أعد كتابة $\cot^2\theta - \tan^2\theta$ بدلالة $\sin\theta$.

الحل

3 $\dfrac{1-2\sin^2\theta}{\sin^2\theta - \sin^4\theta}$

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

٣-٢

تحقق من فهمك

1) أثبت أن المعادلة $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$ تمثل متطابقة.

الحل

1) $Cot^2\theta - \cos^2\theta = \cos^2\theta\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - 1\right)$

$= \cos^2\theta\,(\csc^2 - 1)$

$= \cot^2\theta\cos^2\theta$

عودة لفهرس الفصل (٣)

تحقق من فهمك

2 أي مما يأتي يكافئ العبارة $\tan^2\theta(\cot^2\theta - \cos^2\theta)$ ؟

A $\cot^2\theta$ **B** $\tan^2\theta$ **C** $\cos^2\theta$ **D** $\sin^2\theta$

الحل

2 $\cos^2\theta$

3 أثبت أن المعادلة $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta\tan\theta$ تمثل متطابقة.

الحل

3

$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

$$\cot\theta\tan\theta = 1$$

$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta\tan\theta$$

تحقق من فهمك

3) $\cot\theta\tan\theta = \csc^2\theta - \cot^2\theta$.

1) $\cot^2\theta - \cos^2\theta =$

$\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \cos^2\theta =$

$\cos^2\theta\left(\dfrac{1}{\sin^2\theta} - 1\right) =$

$\cos^2\theta(\csc^2\theta - 1)$

$\cot^2\theta\cos^2\theta$

عودة لفهرس الفصل (٣)

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

1A $\sin 15°$

1B $\cos(-15°)$

الحل

1A $\frac{\sqrt{6}}{4}$

1B $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

عودة لفهرس الفصل (٣)

تحقق من فهمك

إذا كانت شدة التيار c تعطى بالصيغة $c = 2 \sin 285t$ ، فأجب عما يأتي:

2A أعد كتابة الصيغة، باستعمال الفرق بين زاويتين.

2B استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

الحل

2A $2[\sin 315^o \cos 30^o - \cos 315^o \sin 30^o]$

2B $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

تحقق من فهمك

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

3A $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

3B $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

الحل

3A

$= \sin 90^o \cos\theta^o - \cos 90^o \sin\theta^o$

$= (1)\cos\theta^o - (0)\sin\theta^o$

$= \cos\theta$

3B

$= \cos 90^o \cos\theta^o - \sin 90^o \sin\theta^o$

$= (0)\cos\theta^o - (1)\sin\theta^o$

$= -\sin\theta$

تحقق من فهمك

1 أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ ، علمًا بأن $\cos\theta = -\frac{1}{3}; 90° < \theta < 180°$.

الحل

1 $\frac{-4\sqrt{2}}{9}$

عودة لفهرس الفصل (٣)

تحقق من فهمك

3) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ، θ تقع في الربع الثاني.

$\cos^2\theta = 1 - \frac{4}{9}$ $\quad \cos^2\theta = \frac{5}{9}$ $\quad \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}}$$

$$\frac{\sqrt{18 + 6\sqrt{5}}}{6}$$

عودة لفهرس الفصل (٣)

تحقق من فهمك

يعطى تسارع الجاذبية الأرضية عند مستوى سطح البحر (بالسنتمتر لكل ثانية تربيع) تقريبًا بالصيغة: $g = 978 + 5.17\sin^2 L - 0.014 \sin L \cos L$ ، حيث L تمثل زاوية دائرة العرض

4A) بسِّط هذه العلاقة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

4B) استعمل الصيغة المبسطة التي أوجدتها في الفرع 4A، واحسب قيمة g عندما $L = 45°$.

4A

$g = 978 + 5.17\sin^2 L - 0.007(2\sin L \cos L)$

$= 978 + 5.17\sin^2 L - 0.007\sin 2L$

عودة لفهرس الفصل (٣)

4B

$g = 978 + 5.17\sin^2 45 - 0.007\sin 90$

$=980.578$

تحقق من فهمك

5 أثبت أن المعادلة $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$ تمثّل متطابقة.

الحل

5

$$= 4\cos^2 x - (2\sin x \cos x)^2$$
$$= 4\cos^2 x\,(1 - \sin^2 x)$$
$$= 4\cos^2 x(\cos^2 x)$$
$$= 4\cos^4 x$$

أوجد قيمة كل مما يأتي:

إضافي $\sin 135°$

إضافي $\sin 15 \cos 15$

الحل

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{4}$

تحقق من فهمك

1 حُلّ المعادلة $\cos x \sin x = 3\cos x$ ، إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$.

الحل

$\text{Cos } x \sin x - 3\cos x = 0$ $\quad$ $\text{Cos } x(\sin x - 3) = 0$

$\text{Cos } x = 0$ $\quad$ $x = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $x = \frac{3\pi}{2}$

$\text{Sin } x = 3$ مرفوض

تحقق من فهمك

1B حُلّ المعادلة $4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta - 8\sin\theta\cos\theta = 0$ إذا كانت $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

الحل

$4(\sin^2 x + \cos^2 x) - 4(2\sin\theta\cos\theta) = 0$

$4 - 4\sin 2\theta = 0$ $\sin 2\theta = 1$ $2\theta = 90$

$\theta = 45°$ أو $\theta = \frac{\pi}{4}$

عودة لفهرس الفصل (٣)

تحقق من فهمك

1 $\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = 4$

الحل

1 $\cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta = 4$

$1 + \cos^2\theta = 4$ $\cos^2\theta = 3$

$\cos\theta = \pm\sqrt{3}$ مرفوض لا يوجد حل

عودة لفهرس الفصل (٣)

تحقق من فهمك

2A $4\sin x = 2\sin x + \sqrt{2}$

2B حُلّ المعادلة $2\sin\theta = -1$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان.

الحل

2A

$4\sin x - 2\sin x = \sqrt{2}$ $2\sin x = \sqrt{2}$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $x = 45°$, $X = 135°$

2B

$\sin\theta = \frac{-1}{2}$ $\theta = \frac{7\pi}{6}$ $\theta = \frac{11\pi}{6}$

تحقق من فهمك

3 كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة، ليكون ارتفاع مقعدك 41 مترًا فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟

الحل

3 210.330

حلول

تحقق من فهمك

حل المعادلة:-

4 $\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$

الحل

4 عدد لا نهائي من الحلول

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان:

5A) $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$

5B) $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$

الحل

5A) $90^\circ + k \cdot 180^\circ$

5B) $210^\circ + 360^\circ k$

$330^\circ + 360^\circ k$

الفصل (٤)
القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

٤-١

٤-٢

٤-٣

٤-٤

٤-٥

عودة لفهرس تحقق

تحقق من فهمك

حدّد خصائص القطع المكافئ، ثم مثّل منحناه بيانيًا.

1A $8(y+3)=(x-4)^2$

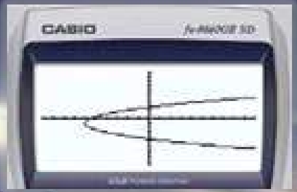
1B $2(x+6)=(y+1)^2$

الحل

1A

المنحنى مفتوح رأسياً
الرأس (4,-3)، البؤرة (4,-1)
محور التماثل x=4، الدليل y=-5
طول الوتر البؤري 8

1B



المنحنى مفتوح أفقياً
الرأس (-6,-1)، البؤرة (-5.5,-1)
محور التماثل y=-1، الدليل x=-6.5
طول الوتر البؤري 2

عودة لفهرس الفصل (٤)

تحقق من فهمك

2 فلك: عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. افترض أنه يمكن تمثيل التلسكوب الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة $x^2 = 44.8(y - 6)$، حيث $-5 \le x \le 5$. إذا كانت x, y بالأقدام، فما أقصر مسافة بين سطح مرآة الزئبق وآلة التصوير؟

الحل

2 11.2

تحقق من فهمك

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدد خصائص القطع المكافئ، ومثّل منحناه بيانيًا.

3A) $x^2 - 4y + 3 = 7$

3B) $3y^2 + 6y + 15 = 12x$

الحل

3A) $x^2=4(y+1)$

المنحنى مفتوح رأسياً

الرأس (0,-1)، البؤرة (0,0)

محور التماثل x=0، الدليل y=-2

طول الوتر البؤري 4

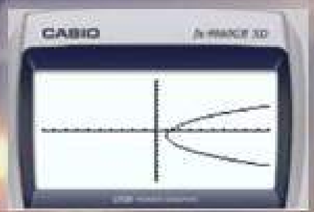
3B) $(y+1)^2=4(x-1)$

المنحنى مفتوح أفقياً

الرأس (-6,-1)، البؤرة (-5.5,-1)

محور التماثل y=-1، الدليل x=-6.5

طول الوتر البؤري 2



تحقق من فهمك

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًا:

4A البؤرة $(-6, 2)$ والرأس $(-6, -1)$

4B البؤرة $(5, -2)$ والرأس $(9, -2)$

4C البؤرة $(-3, -4)$ ، والمنحنى مفتوح إلى أسفل، ويمر بالنقطة $(5, -10)$.

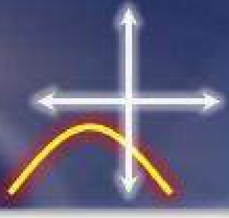
4D البؤرة $(-1, 5)$ ، والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(8, -7)$.

الحل

4A $(x+6)^2=12(y+1)$

4B $(y+2)^2=-12(x-9)$

4C $(x+3)^2=-8(y+2)$



4D $(y-5)^2=12(x+4)$

تحقق من فهمك

5A اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ، $y = 4x^2 + 4$ عند النقطة $(-1, 8)$

5B اكتب معادلة مماس منحني القطع المكافئ، $x = 5 - \frac{y^2}{4}$ عند النقطة $(1, -4)$

الحل

5A $y = -8x$

5B $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$

تحقق من فهمك

حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًا:

1A $\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$

الحل

1A

الاتجاه: رأسي، المركز: (6,-3)

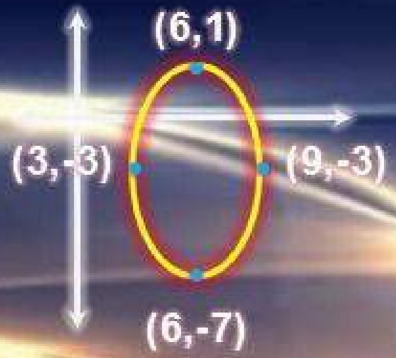
البؤرتان: $(6,-3\pm\sqrt{7})$

الرأسان: $(6,-3\pm4)$

الرأسان المرافقان: $(6\pm3,-3)$

المحور الأكبر X=6، طوله=8

المحور الأصغر Y=-3، طوله=6

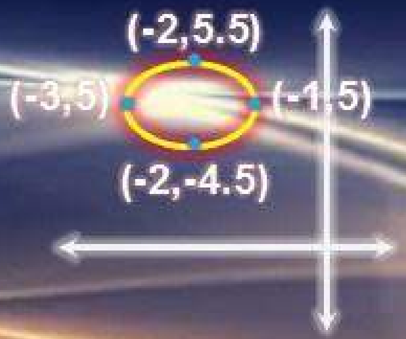


عودة لفهرس الفصل (٤)

1B $x^2 + 4y^2 + 4x - 40y + 103 = 0$

الحل

1B



الاتجاه: أفقي، المركز: (-2,5)

البؤرتان: $(-2\pm\frac{\sqrt{3}}{2},5)$

الرأسان: $(-2\pm1,5)$

الرأسان المرافقان: $(-2,5\pm\frac{1}{2})$

المحور الأكبر y=5، طوله=2

المحور الأصغر x=-2، طوله=1

حلول

تحقق من فهمك

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

2A البؤرتان $(-7, 3)$, $(19, 3)$ ؛ وطول المحور الأكبر 30 وحدة.

2B الرأسان $(-2, 8)$, $(-2, -4)$ ؛ وطول المحور الأصغر 10 وحدة.

الحل

2A

$$\frac{(x-6)^2}{22.5}+\frac{(y-3)^2}{56}=1$$

2B

$$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$$

تحقق من فهمك

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

3A $\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1$

3B $\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1$

الحل

3A ≈ 0.79

3B ≈ 0.32

4 الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39 ، فإذا كان عمق العين 25 mm ، فما ارتفاعها؟

الحل

4 ≈ 23.02

تحقق من فهمك

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

3A) $\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1$

3B) $\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1$

الحل

3A) ≈ 0.79

3B) ≈ 0.32

4) الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39 . فإذا كان عمق العين 25 mm ، فما ارتفاعها؟

الحل

4) ≈ 23.02

تحقق من فهمك

5A اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (0 , 0) و نصف قطرها 3 .

5B اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (5 , 0) وقطرها 10 .

الحل

5A $x^2+y^2=9$

5B $(x-5)^2+y^2=25$

6 أوجد معادلة دائرة، إذا كان طرفا قطر فيها $(5, 1)$, $(-3, 3)$.

الحل

6 $(x-2)^2+(y-1)^2=17$

تحقق من فهمك

5A اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (0 , 0) و نصف قطرها 3 .

5B اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (5 , 0) وقطرها 10 .

الحل

5A $x^2+y^2=9$

5B $(x-5)^2+y^2=25$

6 أوجد معادلة دائرة، إذا كان طرفا قطر فيها $(5, 1)$, $(-3, 3)$.

الحل

6 $(x-2)^2+(y-1)^2=17$

تحقق من فهمك

1A حدِّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ ، ثم مثِّل منحناه بيانيًا.

الحل

1A

الاتجاه: أفقي، المركز: (0,0)

الرأسان: $(\pm 2,0)$

البؤرتان: $(\pm\sqrt{5}, 0)$

المحور القاطع y=0

المحور المرافق x=0

خطا التقارب $y=\pm\frac{1}{2}x$

عودة لفهرس الفصل (٤)

حلول

1B

حدِّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$ ، ثم مثِّل منحناه بيانيًا.

الحل

1B

الاتجاه: رأسي، المركز: (-1,-4)

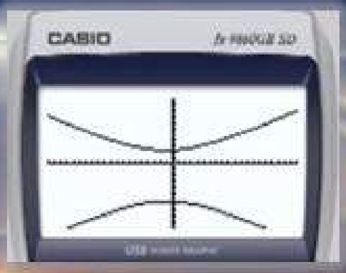
الرأسان: $(-1, -4 \pm 8)$

البؤرتان: $(-1, -4 \pm \sqrt{145})$

المحور القاطع $x=-1$

المحور المرافق $y=-4$

خطا التقارب $y+4=\pm\frac{8}{9}(x+1)$



تحقق من فهمك

اكتب معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا.

2A $4x^2-9y^2-8x-36y=68$

2B $2x^2-3y^2-12x-36=0$

الحل

2A

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$$

الاتجاه: أفقي، المركز: (1,-2)

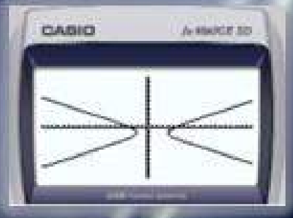
الرأسان: $(1\pm\sqrt{13},-2)$

البؤرتان: $(1\pm3,\ -2)$

المحور القاطع $y=-2$

المحور المرافق $x=1$

خطا التقارب $y+2=\pm\frac{2}{3}(x-1)$



2B

$$\frac{(x-3)^2}{27}-\frac{(y-0)^2}{18}=1$$

الاتجاه: أفقي، المركز: (3,0)

الرأسان: $(3\pm3\sqrt{3},0)$

البؤرتان: $(3\pm3\sqrt{5},\ 0)$

المحور القاطع $y=0$

المحور المرافق $x=3$

خطا التقارب $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}(x-3)$

تحقق من فهمك

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

3A الرأسان $(3, 6)$, $(3, 2)$، وطول المحور المرافق 10 وحدات.

3B البؤرتان $(2-, 2)$, $(12-, 2)$، وخطا التقارب $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$, $y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$.

الحل

3A $$\frac{(y-4)^2}{4} + \frac{(x-3)^2}{25} = 1$$

3B $$\frac{(x-7)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

تحقق من فهمك

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

4A $\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1$

4B $\frac{(y-2)^2}{15} - \frac{(x+9)^2}{75} = 1$

الحل

4A 1.5

4B $\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{15}}$

تحقق من فهمك

ملاحة بحرية : تعطلت سفينة عند نقطة في عرض البحر، بحيث كان الفرق بين بعدي السفينة عن أقرب محطتين إليها 80 ميلاً بحريًا .

5A إذا كان موقعا المحطتين يمثلان بؤرتي قطع زائد تقع السفينة عليه، فاكتب معادلة القطع الزائد إذا كانت المحطتان تقعان عند النقطتين $(100, 0)$,$(-100, 0)$.

5B أوجد إحداثيي موقع السفينة إذا كانت تقع على المستقيم الواصل بين البؤرتين، وكانت أقرب إلى المحطة التي إحداثياها$(100, 0)$.

الحل

5A $\frac{x^2}{1600} - \frac{y^2}{8400} = 1$

5B $(40, 0)$

تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

تحقق من فهمك

1 اكتب المعادلة $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله، ومثّل منحناه بيانيًا.

الحل

1 $$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$$

وهي معادلة قطع ناقص

عودة لفهرس الفصل (٤)

تحقق من فهمك

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

2A $8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$

2B $3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$

2B $3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0$

الحل

2A قطع زائد

2B قطع زائد

2C قطع ناقص

تحقق من فهمك

3 استعمل $\theta = \frac{\pi}{6}$ لكتابة الصورة القياسية للمعادلة $7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2 - 60 = 0$ في المستوى $x'y'$. ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

الحل

3

$$\frac{x'^2}{\frac{60}{9}} + \frac{y'^2}{60} = 1$$

وهي معادلة قطع ناقص

4 إذا كانت معادلة الترس بعد دوران $30°$ في المستوى $x'y'$ هي $(x')^2 + 4(y')^2 - 40 = 0$. فاكتب معادلة الترس في المستوى xy .

الحل

4

$$7^2 - 6\sqrt{3}Xy + 13y^2 - 160 = 0$$

٤ـ٥ المعادلات الوسيطية

تحقق من فهمك

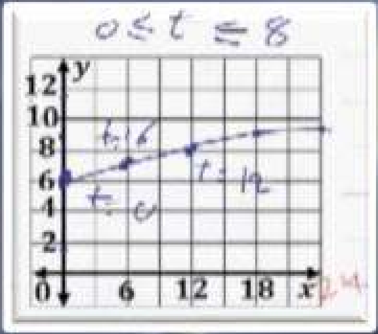
مثِّل بيانيًّا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كل مما يأتي:

1A $x = 3t, y = \sqrt{t} + 6; 0 \le t \le 8$

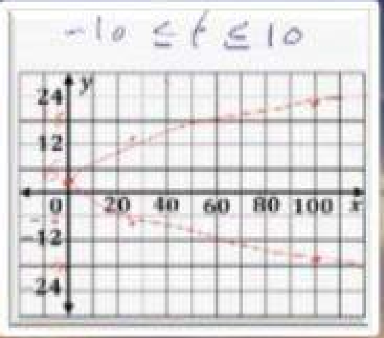
1B $x = t^2, y = 2t + 3; -10 \le t \le 10$

الحل

1A



1B



عودة لفهرس الفصل (٤)

تحقق من فهمك

2 اكتب المعادلتين الوسيطيتين $y = 4t,\ x = t^2 - 5$ بالصورة الديكارتية.

الحل

2

$$y = 4\sqrt{x+5}$$

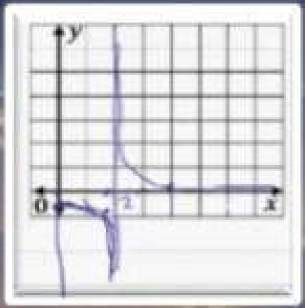
$$x = \frac{y^2}{16} - 5$$

تحقق من فهمك

3 اكتب $x = \sqrt{t+4}$ ، $y = \frac{1}{t}$ بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًا، وحدد المجال.

الحل

3 $y = \frac{1}{x^2-4}$



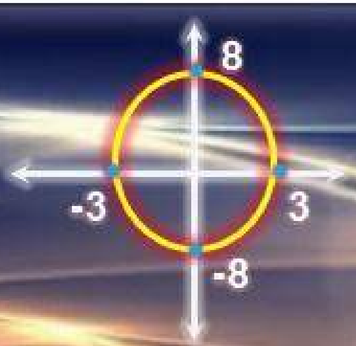
تحقق من فهمك

4 اكتب $y = 8 \cos \theta, x = 3 \sin \theta$ بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًا.

الحل

4

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{64} = 1$$



تحقق من فهمك

استعمل المتغير الوسيط في كل مما يأتي لكتابة معادلتين وسيطيتين تمثلان المعادلة الديكارتية $y = 6 - x^2$ ، ثم مثل المنحنى بيانيًا موضحًا السرعة والاتجاه:

5A $t = x + 1$

5B $t = 3x$

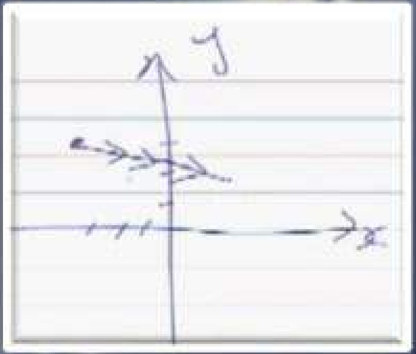
5C $t = 4 - 2x$

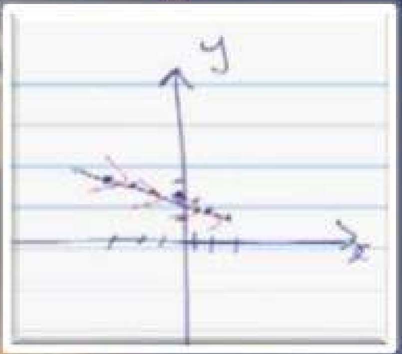
الحل

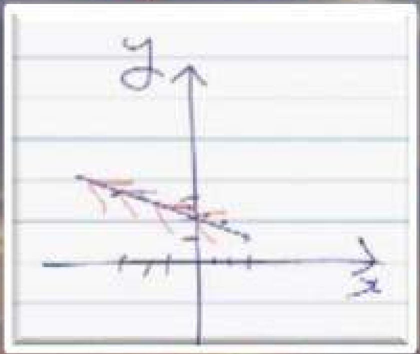
5A $x = t - 1$, $y = \sqrt{-t + 7}$

5B $x = \frac{t}{3}$, $y = \sqrt{6 - \frac{t}{3}}$

5C $x = 2 - \frac{t}{2}$, $y = \sqrt{4 + \frac{t}{2}}$

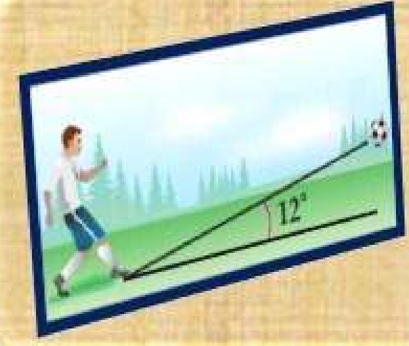






تحقق من فهمك

6 **كرة قدم:** ركل أحمد كرة بسرعة ابتدائية مقدارها 56 m/s وبزاوية مقدارها 12° مع الأفق. ما أقصى مسافة أفقية تقطعها الكرة؟



عودة لفهرس الفصل (٤)